JPFS 5 (2) 2022 68 - 74

Jurnal Pendidikan Fisika dan Sains (JPFS)

Journal homepage: http:// journal.unucirebon.ac.id/index.php/jpfs

Analisis Persamaan Energi Menggunakan Metode Parametrik Nikiforov-Uvarov Untuk Atom Berelektron Tunggal Dengan potensial Hulthen

Nani Sunarmi*[1]

[1]Program Studi Tadris Fisika, FTIK UIN Sayyid Ali Rahmatullah Tulungagung

*nanisunarmi@gmail.com

DOI: https://doi.org/10.52188/jpfs.v5i2.275

Accepted: 13 Juli 2022 Approved: 28 September 2022 Published: 30 September 2022

ABSTRAK

Solusi persamaan Schrodinger dari sistem partikel dapat memberikan infomasi karakteristik dari partikel tersebut. Solusi persamaan Schrodinger dapat memberikan persamaan gelombang dan persamaan energi dari partikel. Persamaan energi partikel diperoleh berdasarkan persamaan Schrodinger bagian radial. Penyelesaian persamaan Schrodinger yang melibatkan potensial khusus dilakukan dengan menggunakan metode aproksimasi. Salah satu potensial khusus dalam sistem atomik yang cukup penting adalah potensial Hulthen. Potensial Hulthen banyak dikaji dalam sistem molekuler serta pada kasus plasma pada atom hidrogen. Penyelesaian persamaan Schrodinger untuk atom berelektron tunggal dengan potensial Hulthen dapat diselesaikan dengan metode Parametrik Nikiforov-Uvarov. Metode Parametrik Nikiforov-Uvarov dipilih karena bentuk dari persamaan Schrodinger dari sistem dapat direduksi menjadi bentuk umum persamaan diferensial orde dua tipe hipergeometri. Penyelesaian persamaan energi sistem dilakukan dengan memisahkan bagian radial dari persamaan Schrodinger. Persamaan Schrodinger bagian radial yang telah dipisahkan mengandung suku potensial Hulthen dan suku persamaan energi. Persamaan Schrodinger bagian radial dirubah menjadi persamaan diferensial orde dua tipe hipergeometri yang mengandung parameter-parameter yang memenuhi Metode Parametrik Nikiforov-Uvarov. Dengan mensubstitusikan persamaan parameter ke dalam persamaan eigen nilai energi diperoleh persamaan energi partikel E. Persamaan tingkat energi E atom berelektron tunggal dengan potensial Hulthen yang telah diperoleh bergantung pada bilangan kuantum utama n_p, K serta *screening parameter* $1/\kappa$.

Kata kunci: Persamaan Energi, Potensial Hulthen, Metode Parametrik Nikiforov-Uvarov

ABSTRACT

The solution of the Schrodinger equation of a particle system can provide information about the characteristics of the particle. Solutions to the Schrodinger equation can provide both the wave equation and the energy equation of the particle. The particle energy equation is obtained based on the radial section of the Schrodinger equation. The solution to the Schrodinger equation involving a special potential is carried out using the approximation method. One of the special potentials in atomic systems that is quite important is the Hulthen potential. The Hulthen potential has been extensively studied in molecular systems as well as in the case of plasma in the hydrogen atom. The solution to the Schrodinger equation for a single-electron atom with a Hulthen potential can be solved by the Nikiforov-Uvarov parametric method.The Parametric Nikiforov-Uvarov method was chosen because the form of the Schrodinger equation of the system can be reduced to a general form of a hypergeometric-type second order differential equation. Solving the energy equation of the system is done by separating the radial part of the Schrodinger equation. The equation for the radial part that has been separated contains the Hulthen potential term and the energy equation term. The radial part of the Schrodinger equation is converted into a second-order differential equation of hypergeometric-type containing parameters that meet the Parametric Nikiforov-Uvarov Method. By substituting the parameter equation into the energy value eigen equation, the energy equation of the particle E is obtained. The energy level equation E for a single-electron atom with the Hulthen potential that has been obtained depends on the principal quantum number n_p,K and the screening parameter $1/\kappa$.

Keyword: Energy Equation, Hulthen Potential, The Parametric Nikiforov-Uvarov Method

---

PENDAHULUAN

Persamaan Schrodinger menjadi salah satu kajian yang penting dalam Fisika Kuantum. Penyelesaian persamaan Schrodinger dapat memberikan informasi terkait prilaku sistem fisis yang dikaji (Ahmed & Buragohain, 2010). Penyelesaian persamaan Schrodinger dilakukan untuk memperoleh persamaan gelombang dan persamaan energinya. Dalam beberapa kasus, persamaan Schrodinger dapat diselesaikan secara eksak akan tetapi dalam beberapa kasus lain hanya dapat dilakukan dengan metode aproksimasi (Antia dkk., 2020). Metode aproksimasi tersebut di antaranya Metode WKB (Omugbe, 2020), AIM (Ikhdair & Falaye, 2013), SUSY QM (Purohit dkk., 2021), Nikiforov-Uvarov (Fitriani & Suparmi, 2017) dll. Metode aproksimasi umumnya digunakan untuk sistem yang melibatkan potensial khusus misalnya Hulthen-Hellmann (Akpan dkk., 2021), Potensial Quadratik Yukawa dan Eckart (Antia dkk., 2020), Wood-Saxon (Suparmi dkk., 2021), Kratzer (Onyenegecha dkk., 2021), dll.

Potensial yang menjadi tinjauan dalam penelitian ini adalah potensial Hulthen. Potensial Hulthen digunakan dalam beberapa cabang fisika misalnya pada Fisika Nuklir, Fisika Partikel , Fisika Atom, Molekuler dan Fisika Kimia (Berkdemir, 2012). Selain itu, potensial Hulthen juga dikenal sebagai potensial yang menggambarkan efek penyaringan plasma pada atom hidrogen yang tertanam dalam plasma yang digabungkan secara lemah (Bahar dkk., 2016). Potensial Hulthen memiliki jangkauan pendek dan memiliki perilaku seperti potensial Coulomb untuk nilai r kecil dan menurun secara eksponensial untuk nilai r besar. Bentuk dari potensial Hulthen dapat dituliskan dengan persamaan berikut (Berkdemir, 2012):

$$V(r) = -\frac{K}{\kappa}\frac{e^{-\frac{r}{\kappa}}}{1-e^{-\frac{r}{\kappa}}} \tag{1}$$

dengan $1/\kappa$ dikenal sebagai screening parameter dan K merupakan nomor atom. Solusi eksak dari persamaan Schrodinger untuk partikel dalam potensial Hulthen hanya dapat $\ell = 0$. Sedangkan untuk solusi persamaan Schrodinger untuk $\ell \neq 0$ dilakukan dengan menggunakan metode aproksimasi.

Persamaan Schrodinger bebas waktu secara umum dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right\} \Psi(x) = E\,\Psi(x) \tag{2}$$

di mana faktor di dalam kurung menyatakan operator hamiltonan $\hat{H}$ dari suatu sistem. Pengertian operator hamiltonan sendiri merupakan operator yang mewakili jumlah energi kinetik dan energi potensial dari partikel. Berdasarkan hal tersebut maka persamaan (2) juga dapat dinotasikan dalam bentuk persamaan yang melibatkan operator hamiltonan $\hat{H}$ berikut:

$$\hat{H}\,\Psi(x) = E\,\Psi(x) \tag{3}$$

Persamaan (3) tidak lain merupakan persamaan nilai eigen karena operator $\hat{H}$ terhadap fungsi gelombang $\Psi(x)$ tidak menghasilkan fungsi baru melainkan hanya menghasilkan suatu fungsi dengan suatu bilangan yang disebut dengan E. Nilai E memiliki persyaratan tidak boleh bernilai sembarang dan bersifat diskrit. Hal tersebut yang disebut dengan Pengkuantuman Energi. Pengkuantuman ini menjadi salah satu konsep yang penting pada fisika kuantum. Pengkuantuman energi mengakibatkan energi partikel tidak boleh memiliki nilai sembarang serta pada keadaan terikat energi partikel harus terkuantisasi (Sutopo, 2005).

Pada kasus atom berelektron tunggal, atom ini memiliki satu elektron yang mengitari proton sebagai inti. Persamaan Schrodinger dalam sistem ini tidaklah memiliki bentuk sama dengan persamaan (2) melainkan memiliki bentuk yang lebih kompleks akibat ditinjau menggunakan koordinat bola. Persamaan Schrodinger untuk atom berelektron tunggal dapat dituliskan (Siregar, 2018)

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\,\nabla^2\Psi(r,\theta,\phi)+V(r,\theta,\phi)\,\Psi(r,\theta,\phi)=E\,\Psi(r,\theta,\phi) \tag{4}$$

dengan μ menyatakan massa tereduksi dari dua partikel yakni elektron dan inti atom serta operator Laplacean ∇^2 dinyatakan dengan

$$\nabla^2=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{1}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}. \tag{5}$$

Berdasarkan persamaan (4), persamaan Schrodinger sistem tersebut dapat dibagi menjadi 3 bagian yakni bagian Radial $R(r)$ dan bagian sudut $Y_\ell^m(\theta,\phi)$ yang terdiri oleh bagian Zenithal (θ) dan Azimuthal (ϕ). Sedangkan fungsi gelombang $\Psi(r,\theta,\phi)$ dapat dituliskan berdasarkan bagiannya menjadi $\Psi(r,\theta,\phi)=R(r)Y_\ell^m(\theta,\phi)$. Untuk mendapatkan persamaan energi partikel dari persamaan Schrodinger dilakukan dengan menyelesaikan persamaan schrodinger bagian Radial. Sistem Partikel dengan kondisi khusus misalnya dipengaruhi potensial tertentu maka perlu mempertimbangkan apakah potensial tersebut mempengaruhi pada bagian Radial atau mempengaruhi pada bagian sudut atau keduanya. Karena dalam proses penyelesaiannya ketiga bagian tersebut baik Radial, Zenithal dan Azimuthal akan diselesaikan secara terpisah. Berdasarkan persamaan dari potensial Hulthen yang ditunjukan oleh persamaan (1), potensial Hulthen hanya mengandung suku bervariabel Radial (r) maka potensial ini hanya akan mempengaruhi persamaan Schrodinger pada bagian Radial sehingga persamaan Schrodinger untuk sistem atom berelektron tunggal yang dipengaruhi potensial Hulthen dapat dituliskan

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\,\nabla^2\Psi(r,\theta,\phi)+V(r)\Psi(r,\theta,\phi)=E\,\Psi(r,\theta,\phi). \tag{6}$$

Dengan demikian solusi persamaan Schrodinger bagian azimutal dan zenital pada atom berelektron tunggal dengan potensial Hulthen memiliki bentuk yang sama dengan solusi pada atom hidrogen. Sedangkan untuk persamaan bagian Radial akibat muncul suku potensial Hulthen di dalamnya, solusi untuk persaaan ini tidak dapat diperoleh secara eksak melainkan memerlukan pendekatan dengan menggunakan metode yang sesuai. Bentuk persamaan Schrodinger bagian radial untuk atom berelektron tunggal dengan potensial Hulthen dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\frac{d^2R(r)}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dR(r)}{dr}+\frac{2\mu r^2}{\hbar^2}\left(E+\frac{K}{\kappa}\frac{e^{-\frac{r}{\kappa}}}{1-e^{-\frac{r}{\kappa}}}-\frac{\hbar^2\ell(\ell+1)}{2\mu r^2}\right)R(r)=0 \tag{7}$$

Persamaan tersebut memiliki bentuk persamaan diferensial orde 2 tipe hipergeometrik yang mana dalam proses penyelesaiannya dapat dilakukan dengan menggunakan metode Parametrik Nikiforov-Uvarov. Penelitian bertujuan untuk menentukan persamaan energi dari atom berelektron tunggal dengan potensial Hulthen menggunakan metode Parametrik Nikiforov-Uvarov.

METODE PARAMETRIK NIKIFOROV-UVAROV

Metode Nikiforov-Uvarov (NU) merupakan metode yang didasarkan pada penyelesaian persamaan diferensial orde 2 tipe hipergeometri melalui ortogonalitas fungsi khusus. Untuk potensial tertentu, persamaan Schrodinger dalam koordinat bola dapat direduksi menjadi persamaan umum dalam bentuk tipe hipergeometri dengan transformasi koordinat $r\rightarrow s$ dan kemudian dapat diselesaikan secara sistematis untuk menemukan solusi yang tepat. Bentuk umum persamaan diferensial orde 2 tipe hipergeometrik dapat dituliskan sebagai berikut (Nikiforov & Uvarov, 1988):

$$\frac{\partial^2\psi(s)}{\partial s^2}+\frac{\bar{\tau}(s)}{\sigma(s)}\frac{\partial\psi(s)}{\partial s}+\frac{\bar{\sigma}(s)}{\sigma^2}\psi(s)=0 \tag{8}$$

dengan polinomial berderajat satu $\bar{\tau}(s)$ dan polinomial berderajat dua $\sigma(s)$ dan $\bar{\sigma}(s)$. Penerapan metode Nikiforov-Uvarov dapat dilakukan dengan dua cara yakni secara konvensional atau parametrik yang lebih dikenal dengan metode Parametrik Nikiforov-Uvarov. Metode Parametrik Nikiforov-Uvarov sendiri merupakan generalisasi metode Nikiforov-Uvarov menggunakan parameter-parameter khusus.

Metode Parametrik Nikiforov-Uvarov memiliki kelebihan dalam menghitung persamaan tingkat energi dengan lebih tepat untuk beberapa sistem kuantum yang dipecahkannya (Antia dkk., 2020). Persamaan diferensial orde dua untuk metode Parametrik Nikiforov-Uvarov dituliskan sebagai berikut (Ita dkk., 2017);

$$\psi''(s) + \frac{c_1 - c_2 s}{s(1 - c_3 s)}\psi'(s) + \frac{[-\chi_1 s^2 + \chi_2 s - \chi_3]}{s^2(1 - c_3 s)^2}\psi(s) = 0. \tag{9}$$

Jika dibandingkan dengan metode Nikiforov-Uvarov konvensional pada persamaan (8) maka diperoleh $\bar{\tau}(s)$, $\sigma(s)$ dan $\bar{\sigma}(s)$ sebagai berikut:

$$\bar{\tau}(s) = c_1 - c_2 s, \qquad \sigma(s) = s(1 - c_3 s), \qquad \bar{\sigma}(s) = [-\chi_1 s^2 + \chi_2 s - \chi_3] \tag{10}$$

Parameter pada persamaan (9) menjadi alat yang penting dalam memperoleh nilai eigen yang tidak lain adalah persamaan E dan fungsi eigen yang tidak lain adalah $\psi(s)$. Parameter c_1, c_2, c_3 pada persamaan (9) adalah konstanta parametrik. Untuk konstanta parametrik yan lain ditentukan dengan persamaan berikut (Okon dkk., 2021):

$$c_4 = \frac{1}{2}(1 - c_1) \tag{11}$$

$$c_5 = \frac{1}{2}(c_2 - 2c_3) \tag{12}$$

$$c_6 = c_5^2 + \chi_1 \tag{13}$$

$$c_7 = 2\, c_4 c_5 - \chi_2 \tag{14}$$

$$c_8 = c_4^2 + \chi_3 \tag{15}$$

$$c_9 = c_3 c_7 + c_3^2 c_8 + c_6 \tag{16}$$

$$c_{10} = c_1 + 2c_4 + 2\sqrt{c_8} \tag{17}$$

$$c_{11} = c_2 - 2c_5 + 2\left[\sqrt{c_9} + c_3\sqrt{c_8}\right] \tag{18}$$

$$c_{12} = c_4 + \sqrt{c_8} \tag{19}$$

$$c_{13} = c_5 - \left[\sqrt{c_9} + c_3\sqrt{c_8}\right]. \tag{20}$$

Sedangkan untuk persamaan energi dapat ditentukan dengan persamaan (Okon dkk., 2020) berikut:

$$c_2 n - (2n+1)c_5 + (2n+1)\left[\sqrt{c_9} + c_3\sqrt{c_8}\right] + n(n-1)c_3 + c_7 + 2c_3 c_8 + 2\sqrt{c_8 c_9} = 0 \tag{21}$$

Persamaan tersebut tidak lain adalah persamaan yang digunakan untuk mencari eigen nilai energi. Hasil akhir persamaan gelombang dapat diketahui dengan menggunakan persamaan

$$\psi(s) = \phi(s)\chi_n(s) = N_n s^{c_{12}}(1 - c_3 s)^{c_{13}} P_n^{(c_{10}, c_{11})}(1 - 2c_3 s) \tag{22}$$

dengan N_n adalah konstanta normalisasi dan $P_n^{(c_{10}, c_{11})}$ adalah polinomial Jacobi.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Persamaan energi dari sistem atom berelektron tunggal dengan potensial Hulthen dikaji menggunakan metode Parametrik Nikiforov-Uvarov. Metode Parametrik Nikiforov-Uvarov dipilih karena Persamaan Scrodinger bagian radial sistem dapat direduksi menjadi persamaan diferensial orde dua tipe hipergeometri. Persamaan Scrodinger bagian radial yang ditunjukan oleh persamaan (7) belum memenuhi bentuk persamaan diferensial orde dua tipe hipergeometri. Untuk dapat menerapkan metode parametrik Nikiforov-Uvarov maka persamaan tersebut perlu dirubah sehingga memenuhi persamaan (8) sehingga dapat didefinisikan parameter-parameter yang diperlukan untuk menentukan persamaan energi sistem. Untuk merubah persamaan (7) agar memenuhi bentuk persamaan (8) dilakukan pendekatan dengan permisalan berikut:

$$R(r)=\frac{U(r)}{r} \tag{23}$$

sehingga persamaan persamaan Scrodinger bagian radial berubah menjadi persamaan berikut:

$$\frac{d^2U(r)}{dr^2}+\left[\frac{2\mu r^2}{\hbar^2}\left(E+\frac{K}{\kappa}\frac{e^{-\frac{r}{\kappa}}}{1-e^{-\frac{r}{\kappa}}}-\frac{\hbar^2\ell(\ell+1)}{2\mu r^2}\right)\right]U(r)=0. \tag{24}$$

Persamaan (24) didekati dengan aproksimasi untuk suku bagian sentrifugalnya berikut (Berkdemir, 2012):

$$\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\approx\frac{\ell(\ell+1)e^{-r/\kappa}}{\kappa^2(1-e^{-r/\kappa})^2} \tag{25}$$

Dengan menggantikan $\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}$ dengan $\frac{\ell(\ell+1)e^{-r/\kappa}}{\kappa^2\left(1-e^{-r/\kappa}\right)^2}$ dan melakukan tranformasi $e^{-r/\kappa}=s$ dan juga merubah $U(r)\rightarrow\psi(s)$ maka persamaan (24) berubah menjadi

$$\frac{d^2\psi(s)}{ds^2}+\frac{1-s}{s(1-s)}\frac{d\psi(s)}{ds}+\frac{1}{s^2(1-2)^2}\left[-(\alpha+\beta)s^2+(2\alpha+\beta-\gamma)s-\alpha\right]=0 \tag{26}$$

dimana

$$\alpha=\frac{2\mu E\kappa^2}{\hbar^2} \tag{27}$$

$$\beta=\frac{2\mu K\kappa}{\hbar^2} \tag{28}$$

$$\gamma=\ell(\ell+1) \tag{29}$$

Persamaan (26) telah memenuhi bentuk dari persamaan diferensial orde 2 tipe hipergeometrik sesuai dengan persamaan (8) dan jika dibandingkan dengan persamaan (9) maka diperoleh parameter-parameter dari metode Parametrik Nikiforov-Uvarov berikut:

$$c_1=1 \tag{30}$$

$$c_2=1 \tag{31}$$

$$c_3=1 \tag{32}$$

$$c_4=0 \tag{33}$$

$$c_5=-1/2 \tag{34}$$

$$c_6=1/4+(\alpha+\beta) \tag{35}$$

$$c_7=-(2\alpha+\beta-\gamma) \tag{36}$$

$$c_8=\alpha \tag{37}$$

$$c_9=\gamma+1/4 \tag{38}$$

$$c_{10}=1+2\sqrt{\alpha} \tag{39}$$

$$c_{11}=2+2\left[\sqrt{\gamma+1/4}+\sqrt{\alpha}\right] \tag{40}$$

$$c_{12}=\sqrt{\alpha} \tag{41}$$

$$c_{13}=-1/2-\left[\sqrt{\gamma+1/4}+\sqrt{\alpha}\right]. \tag{42}$$

Persamaan Energi ditentukan dengan menggunakan persamaan (21) dan memasukkan parameter-parameter yang telah diperoleh untuk sistem atom elekron tunggal dengan potensial Hulthen yang ditunjukan oleh persamaan (30)-(42) sehingga diperoleh persamaan berikut:

$$n^2+n+\tfrac{1}{2}+\gamma-\beta+(2n+1)\sqrt{\gamma+\tfrac{1}{4}}+\left(2n+1+2\sqrt{\gamma+\tfrac{1}{4}}\right)\sqrt{\alpha}=0. \tag{43}$$

Dengan mengingat bahwa persamaan energi E termuat dalam permisalan α maka untuk mendapatkan persamaan energi E maka persamaan yang memuat α harus dipisahkan dalam satu ruas yang sama sehingga diperoleh

$$\sqrt{\alpha}=\frac{\beta-\gamma-n^2-n-\frac{1}{2}-(2n+1)\sqrt{\gamma+\frac{1}{4}}}{\left(2n+1+2\sqrt{\gamma+\frac{1}{4}}\right)}. \tag{44}$$

Jika persamaan α, β, γ disubtitusikan sesuai dengan persamaan (27), (28), (29) dan dengan manipulasi matematis maka diperoleh persamaan energi dari sistem atom berelektron tunggal dengan potensial hulthen adalah

$$E=\frac{\hbar^2}{2\mu}\left[\frac{\mu K}{\hbar^2(n+\ell+1)}-\frac{(n+\ell+1)}{2\kappa}\right]^2. \tag{45}$$

dimana n bilangan yang menyatakan jumlah simpul dalam fungsi gelombang radial, ℓ menyatakan bilangan kuantum azimuthal dan persamaan

$$n_p=(n+\ell+1) \qquad n_p=1,2,3,4,\ldots \tag{46}$$

tidak lain menunjukan persamaan untuk bilangan kuantum utama yang menyatakan kulit dimana elektron berada dalam atom. Bilangan kuantum ℓ memiliki nilai $\ell\le n_p-1$ sehingga bilangan kuantum ini hanya memiliki nilai dari 0 sampai dengan n_p-1. Persamaan energi yang diperoleh pada persamaan (45) dapat dituliskan kembali

$$E_{n_p}=\frac{\hbar^2}{2\mu}\left[\frac{\mu K}{\hbar^2 n_p}-\frac{n_p}{2\kappa}\right]^2. \tag{45}$$

Persamaan tingkat energi yang telah diperoleh bergantung pada bilangan kuantum utama n_p, K serta *screening parameter* $1/\kappa$. Jika nilai parameter $\kappa\to\infty$, persamaan energi pada sistem tersebut dapat tereduksi menjadi persamaan energi pada sistem dengan potensial Coulomb (Berkdemir, 2012)

$$E_{n_p}=\frac{\mu}{2\hbar^2}\left[\frac{K}{n_p}\right]^2. \tag{46}$$

KESIMPULAN

Solusi eksak dari persamaan Schrodinger dapat dilakukan hanya pada kasus sistem yang melibatkan potensial dalam bentuk sederhana. Kasus dengan potensial-potensial khusus dengan bentuk yang cukup rumit tidak dapat diperoleh solusi eksak. Solusi untuk sistem dengan potensial khusus tersebut dapat dilakukan dengan aproksimasi menggunakan metode matematis tertentu. Untuk sistem dengan dengan potensial Hulthen, solusi persamaan energi dapat diperoleh dengan melakukan aproksimasi menggunakan Metode Parametrik Nikiforov-Uvarov. Hal tersebut dilakukan dengan mengubah persamaan Scrodingger bagian radial menjadi persamaan diferensial orde dua tipe hipergeometri. Berdasarkan persamaan diferensial orde dua tipe hipergeometri yang sesuai dengan Metode Parametrik Nikiforov-Uvarov akan diperoleh parameter-parameter yang digunakan untuk mendefinisikan persamaan energi. Persamaan energi diperoleh dengan mensubstitusikan parameter-parameter ke dalam persamaan yang memuat eigen nilai energi pada Metode Parametrik Nikiforov-Uvarov. Dengan melakukan manipulasi matematis diperoleh persamaan energi yang ditunjukan oleh persamaan (45). Persamaan tingkat energi yang telah diperoleh bergantung pada bilangan kuantum utama n_p, K serta *screening parameter* $1/\kappa$.

REFERENSI

Ahmed, S. A. S., & Buragohain, L. (2010). Exact S-wave Solution of Schr odinger Equation for Quantum Bound State Non-Power Law Systems. *Bulg. J. Phys*, *37*, 133–143.

Akpan, I. O., Inyang, E. P., & William, E. S. (2021). Approximate solutions of the Schrödinger equation with Hulthén-Hellmann potentials for a quarkonium system. *Revista Mexicana de Fisica*, *67*(3), 482–490. https://doi.org/10.31349/RevMexFis.67.482

Antia, A. D., Okon, I. B., Akankpo, A. O., & Usanga, J. B. (2020). Non-Relativistic Bound State Solutions of Modified Quadratic Yukawa plus <i>q</i>-Deformed Eckart Potential. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, *08*(04), 660–671. https://doi.org/10.4236/jamp.2020.84051

Bahar, M. K., Soylu, A., & Poszwa, A. (2016). The Hulthén Potential Model for Hydrogen Atoms in Debye Plasma. *IEEE Transactions on Plasma Science*, *44*(10), 2297–2306. https://doi.org/10.1109/TPS.2016.2604421

Berkdemir, C. (2012). Theoretical Concepts of Quantum Mechanics. In *Theoretical Concepts of Quantum Mechanics*. InTech. https://doi.org/10.5772/2075

Fitriani, S. N., & Suparmi. (2017). Solusi Persamaan Dirac Dengan Spin Simetri Untuk Potensial Scarf Ii Hiperbolik Terdeformasi-Q Plus Tensor Tipe Coulomb Dengan Menggunakan Metode Nikiforov Uvarov. *Kappa Journal*, *1*(1), 13. https://doi.org/10.29408/kappa.v1i1.407

Ikhdair, S. M., & Falaye, B. J. (2013). Approximate analytical solutions to relativistic and nonrelativistic Pöschl-Teller potential with its thermodynamic properties. *Chemical Physics*, *421*, 84–95. https://doi.org/10.1016/j.chemphys.2013.05.021

Ita, B. I., Louis, H., & Magu, T. O. (2017). Bound State Solutions of the Klein Gordon Equation with Woods-Saxon Plus Attractive Inversely Quadratic Potential Via Parametric Nikiforov-Uvarov Method. *World Scientific News*, *74*, 280–287.

Nikiforov, A. F., & Uvarov, V. B. (1988). *Special Functions of Mathematical Physics: A Unified Introduction with Applications*.

Okon, I. B., Antia, A. D., Akankpo, A. O., & Essien, I. E. (2020). Eigen-Solutions to Schrodinger Equation with Trigonometric Inversely Quadratic Plus Coulombic Hyperbolic Potential. *Physical Science International Journal*, *24*(3), 61–75. https://doi.org/10.9734/psij/2020/v24i330183

Okon, I. B., Omugbe, E., Antia, A. D., Onate, C. A., Akpabio, L. E., & Osafile, O. E. (2021). Spin and pseudospin solutions to Dirac equation and its thermodynamic properties using hyperbolic Hulthen plus hyperbolic exponential inversely quadratic potential. *Scientific Reports*, *11*(1), 1–21. https://doi.org/10.1038/s41598-020-77756-x

Omugbe, E. (2020). Non-relativistic Energy Spectrum of the Deng-Fan Oscillator via the WKB Approximation Method. *Asian Journal of Physical and Chemical Sciences*, 26–36. https://doi.org/10.9734/ajopacs/2020/v8i130107

Onyenegecha, C. P., Njoku, I. J., Omame, A., Okereke, C. J., & Onyeocha, E. (2021). Dirac equation and thermodynamic properties with the Modified Kratzer potential. *Heliyon*, *7*(9), e08023. https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2021.e08023

Purohit, K. R., Parmar, R. H., & Rai, A. K. (2021). Energy and momentum eigenspectrum of the Hulthén-screened cosine Kratzer potential using proper quantization rule and SUSYQM method. *Journal of Molecular Modeling*, *27*(12). https://doi.org/10.1007/s00894-021-04965-0

Siregar, R. E. (2018). *Fisika Kuantum*. Universitas Padjajaran.

Suparmi, A., Permatahati, L. K., Faniandari, S., Iriani, Y., & Marzuki, A. (2021). Study of Bohr Mottelson Hamiltonian with minimal length effect for Woods-Saxon potential and its thermodynamic properties. *Heliyon*, *7*(5), e06861. https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2021.e06861

Sutopo. (2005). Pengantar Fisika Kuantum. In *Jurusan Fisika FMIPA UM*. Jurusan Fisika FMIPA UM.